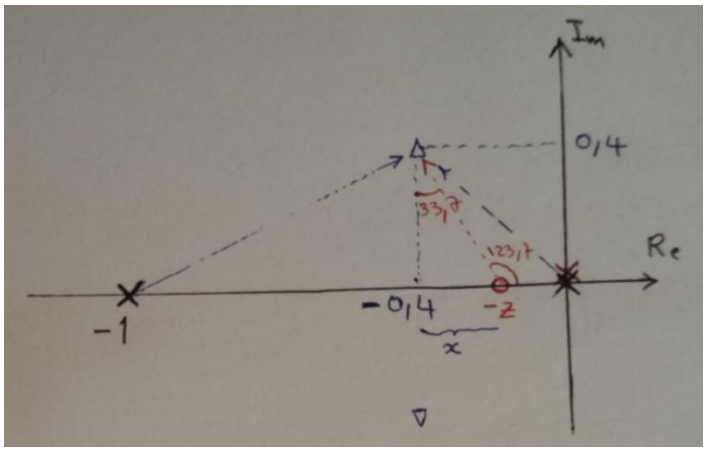
با نام او

حل آزمون کنترل خطی - زمستان ۹۴

پاسخ ۱- زمان نشست 10 یعنی ثابت زمانی 2.5 که این نیز یعنی قسمت حقیقی قطب‌ها باید 0.4 باشد. فراجهش 4% نیز ضریب میرایی 0.7 را نتیجه می‌دهد و این یعنی زاویهٔ 45° و یعنی قسمت موهومی نیز 0.4 باشد. و اما چون خطای مانابه ورودی شیب باید صفر گردد لذا دو انتگرالگیر باید در مسیر پیشرو باشند که چون سامانه خود یکی را دارد پس جبرانساز ما نیز باید یکی داشته باشد که این در ساده‌ترین حالت جبرانساز PI به صورت $k\frac{s+z}{s}$ را می‌طلبد. پس ترکیب صفر و قطب‌ها به همراه جبرانساز به صورت شکل زیر می‌شود.



از شرط زاویه برای جایابیِ قطب‌های مطلوب داریم:

$$-2(135) - tan^{-1}\frac{0.4}{0.6} + \varphi = -180 \;\rightarrow\; \varphi = 123.7 \;\rightarrow\; x = 0.4\ tan\,33.7 = 0.2667$$
$$\rightarrow z = 0.4 - 0.2667 = 0.1333$$

از شرط بهرهٔ مکان نیز برای بهرهٔ کل داریم:

$$k_{\text{کل}} = \frac{(0.4^2 + 0.4^2)\sqrt{0.4^2 + 0.6^2}}{\sqrt{0.4^2 + 0.2667^2}} = 0.48 \rightarrow \quad k = \frac{k_{\text{کل}}}{k_{\text{جبرانساز}}} = \frac{0.48}{1} = 0.48$$

لذا جبرانساز : $0.48\frac{s+0.1333}{s}$

و اما خطای مانا به سهمیِ $\frac{1}{2}t^2 \equiv \frac{1}{s^3}$ خواهد بود: $\frac{1}{k_{\text{ثابت}}} = \frac{1}{0.48 \cdot 0.1333} = 15.625$

پاسخ ۲-

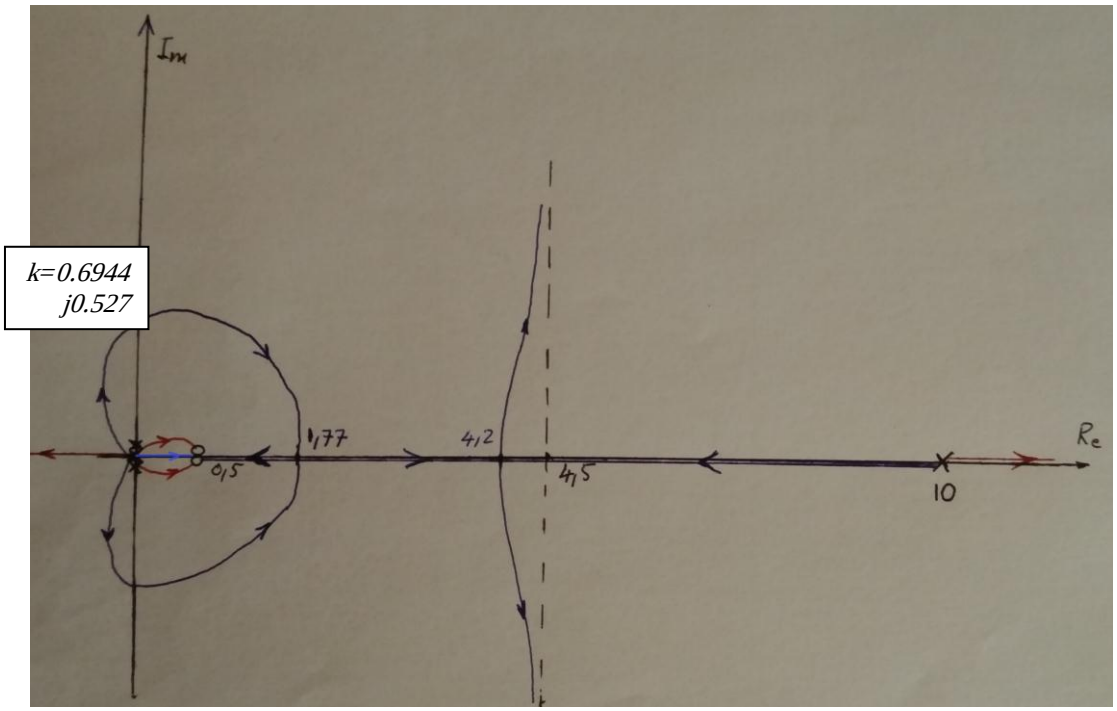
الف- چون تعداد صفرها از قطب‌ها دو تا کمتر است پس دو شاخهٔ بی‌نهایت داریم که برای $k > 0$ به صورت قائم و مرکزشان خواهد بود: $\frac{10-2\cdot\frac{1}{2}}{2} = 4.5$ و برای $k < 0$ نیز این دو شاخه همان دو طرف محور حقیقی خواهند بود(مطابق شکل) و اما می‌توان با توجه به معادلهٔ نقاط ریشه‌های مکرر نقاط ورود و خروج به محور حقیقی را در صورت وجود به دست آورد:

$$4(2s-1)s^3(s-10) - (2s-1)^2(4s^3 - 30s^2)$$
$$= 2s^2(2s-1)[(2s^2 - 20s) - (2s-1)(2s-15)]$$
$$= 2s^2(2s-1)(-2s^2 + 12s - 15) \rightarrow 4.22\ ,\quad 1.77$$

برای اینکه بدانیم چگونه از قطب‌های در مبدأ خارج می‌شود باید زاویهٔ خروج را یافت:

$$k > 0 \;\rightarrow\; -3\theta + 2(180) - 180 = -180 \;\rightarrow\; \theta = 120°$$
$$k < 0 \;\rightarrow\; -3\theta + 2(180) - 180 = 0 \;\rightarrow\; \theta = 60°$$

که این‌ها شکل زیر را نتیجه داده و نقطهٔ تقاطع با محور موهومی نیز با توجه به تحلیل روث-هرویتـز دقیقـاً قابل محاسبه است که در ادامه خواهد آمد.



ب-

$$s^4 - 10s^3 + k(2s-1)^2 = s^4 - 10s^3 + 4ks^2 - 4ks + k$$

s^4	1	$4k$	k
s^3	-10	$-4k$	
s^2	$\frac{-40k+4k}{-10} = 3.6k$	$\frac{-10k}{-10} = k$	
s	$\frac{3.6k(-4k)+10k}{3.6k} = \frac{-14.4k+10}{3.6}$	0	
1	k		

که نقاط حساس عبارتند از $k = 0$, $\frac{10}{14.4} = 0.6944$

که برای $k < 0$ سه تغییر علامت دارد که یعنی سه ریشهٔ سمت راستی دارد

و برای $0 < k < 0.6944$ دو تغییر علامت و لذا دو ریشهٔ سمت راستی دارد

و برای $k > 0.6944$ چهار تغییر علامت و لذا چهار ریشهٔ سمت راستی دارد.

و اما برای $k = 0.6944$ در ردیف s^2 به دست می‌آید:

$$3.6\,s^2 + 1 = 0 \;\rightarrow\; s = \pm j\sqrt{\frac{1}{3.6}} = \pm j(0.527)$$

و در نتیجه می‌توان دو ریشهٔ دیگر را نیز دقیقاً به دست آورد:

$$144\,s^4 - 1440\,s^3 + 400\,s^2 - 400\,s + 100 = (36\,s^2 + 10)(4s^2 - 40s + 10)$$

$$s = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 40}}{4} = \frac{20 \pm 6\sqrt{10}}{4} = 5 \pm 1.5\sqrt{10}$$

ج- روشن است که فاز از $90-$ آغاز و به $180-$ پایان می‌پذیرد و اندازه نیز از بی‌نهایت تا صفر! ولی به دلیل نزدیک‌تر به مبدأ بودنِ دو صفرِ $0.5-$ نسبت به قطب $10-$ بسیار ممکن است، فاز، در فرآیندِ رسیدن به $180-$ به کمتر از $180-$ نیز برسد! لذا برای اطمینان لازم است بیازماییم که آیا این اتفاق می‌افتد و آیا محور حقیقیِ منفی، قطع می‌گردد یا خیر؟! برای این منظور از محاسبهٔ فاز بهره می‌بریم:

$$-3(90) + 2\left(180 - \tan^{-1}\frac{2\omega}{1}\right) - \left(180 - \tan^{-1}\frac{\omega}{10}\right) = -180$$

$$2\tan^{-1}\frac{2\omega}{1} = 90 + \tan^{-1}\frac{\omega}{10}$$

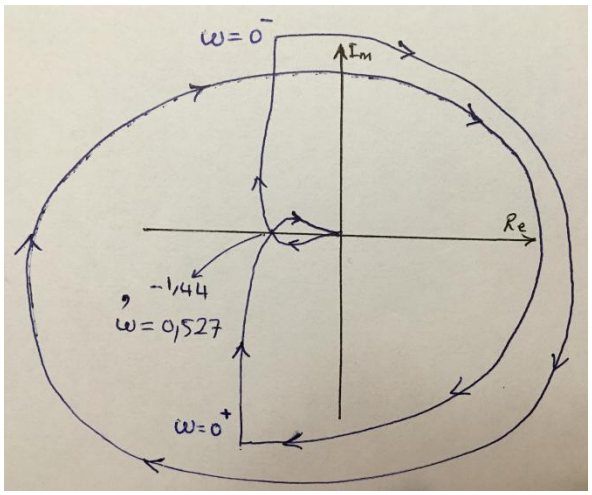
با آزمون و خطا همان پاسخی که در قسمت ب به دست آمد تأیید می‌گردد (البته به صورت بسته نیز می‌توان حل کرد) که:

$$\omega = 0.527$$

و از این می‌تواند محل تقاطع با محور حقیقی نیز به دست آید:

$$\frac{4\omega^2 + 1}{\omega^3\sqrt{\omega^2 + 100}} = 1.44$$

همین‌طور به دلیل سه قطب در مبدأ برای نگاشت از $\omega = 0^-$ به $\omega = 0^+$ ، سه نیم دایرهٔ مربوطهٔ خلاف عقربه تبدیل می‌گردد به سه نیم دایره در جهت عقربه‌ها! و لذا شکل زیر حاصل می‌گردد:



$$Z = N + P \;\;,\;\; P = 1 \rightarrow \;\; Z = N + 1$$

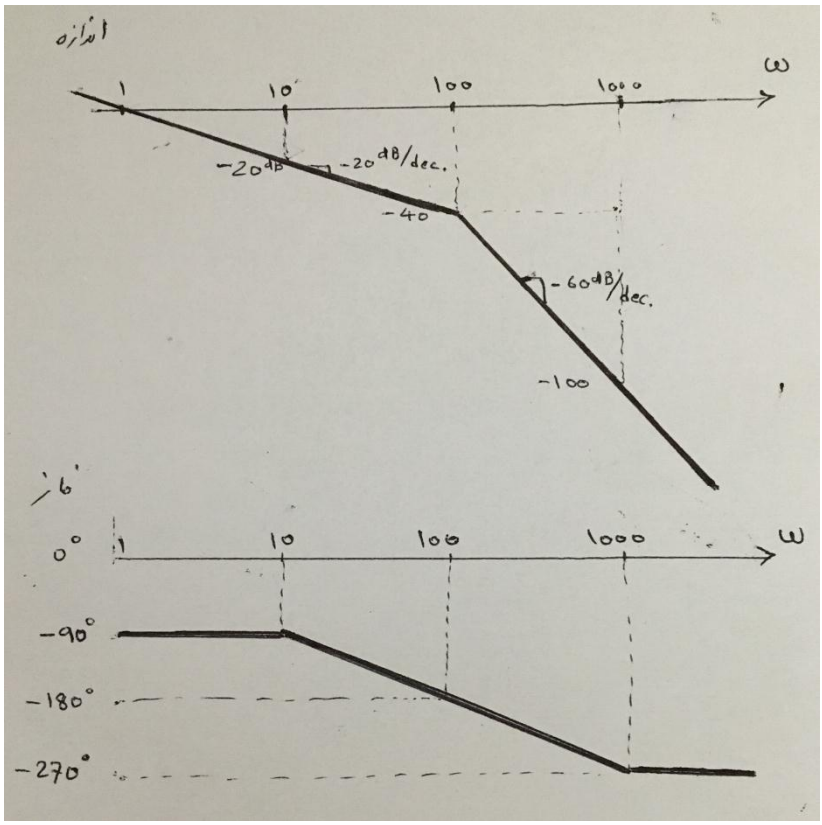
$$-\frac{1}{k} < -1.44 \;\text{ یا }\; 0 < k < \frac{1}{1.44} = 0.6944 \;\rightarrow\;\; N = 1 \rightarrow \;\; Z = 2$$

$$-\frac{1}{k} > -1.44 \;\text{ یا }\; k > 0.6944 \;\rightarrow\;\; N = 3 \rightarrow \;\; Z = 4$$

$$-\frac{1}{k} > 0 \;\text{ یا }\; k < 0 \;\rightarrow\; N = 2 \;\rightarrow\; Z = 3$$

که با نتایج الف و ب تطابق کامل دارد.

پاسخ۳- الف- نمایش بودی در شکل زیر آمده است.



ب- از شکل روشن است که فرکانس‌هایی هستند که اگر آن‌ها فرکانس گذر بهره شوند، حد فاز داریم و می‌توان سامانهٔ حلقه بستهٔ پایداری داشت و لذا با بهرهٔ تنها نیز ممکن است سامانهٔ حلقه بستهٔ پایداری سامان داد. البته این فرکانس‌ها کوچکتر از 100 خواهند بود.

ج- می‌دانیم که یک پیش‌فاز معقول حداکثر حدود $60°$ فاز می‌دهد. از طرفی دیده می‌شود که هر چه فرکانس بزرگتری را برای گذر بهره بگزینیم(تا پهنای باند بزرگتری بیابیم) فاز کاهش می‌یابد و لذا باید تا جایی برویم که اگر 60 را اضافه کنیم به $-150°$ برسیم و این یعنی فاز باید هم‌اکنون $-210°$ باشد. برای یافتن این داریم:

$$-90° - 2\tan^{-1}\frac{\omega}{100} = -210 \rightarrow \quad \omega = 100\tan 60° = 173$$

پس برای پیش‌فاز داریم:

$$\omega_m^2 = zp = 173^2 \quad , \quad \varphi_m = 60° \rightarrow \sin 60° = \frac{a-1}{a+1} = 0.866 \rightarrow \quad a = \frac{p}{z} \cong 14$$

$$\rightarrow \quad 14\,z^2 = 173^2 \rightarrow \quad z = \frac{173}{\sqrt{14}} \cong 46 \rightarrow \quad p = 644 \rightarrow \quad H(s) = k\frac{s+46}{s+644}$$

و اما برای kی جبرانساز باید توجه کنیم که فرکانس 173 باید گذر بهره گردد، لذا داریم:

$$k\frac{\sqrt{173^2+46^2}}{\sqrt{173^2+644^2}}\ \frac{1}{173}\ \frac{100^2}{173^2+100^2} = 1 \rightarrow \quad H(s) = 2573\ \frac{s+46}{s+644}$$

و سپاس ویژهٔ اوست!